CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1988 — CONCOURS SCIENCES

MATHÉMATIQUES I

Options M, P, T, TA — *Durée : 4 heures*

Calculatrices électroniques autorisées.

Le sujet proposé comprend quatre parties.

— les candidats de l'option M devront traiter le sujet *en entier*;

— les candidats des options P, T, TA devront traiter uniquement les parties I, II et III.

Définitions et notations.

— E est le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des suites $a = (a_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels.

— δ désigne l'endomorphisme de E tel que, pour toute suite $a = (a_n)_{n\geq 0}$ de E, $\delta(a) = (a_{n+1} - a_n)_{n\geq 0}$.

On pose $\delta^0 = Id_E$ (application identique de E) et, pour tout entier $k \geq 1$, $\delta^k = \delta^{k-1} o \delta$.

Étant donnée une suite $a = (a_n)_{n\geq 0}$ de E on dira :

— qu'elle est positive, et on écrira $a \geq 0$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$;

— qu'elle est convexe si $\delta^2(a) \geq 0$;

— qu'elle est absolument monotone (en abrégé A.M.) si pour tout k entier, $\delta^k(a) \geq 0$.

PREMIÈRE PARTIE

1 - Soit $a = (a_n)_{n\geq 0}$ un élément de E.

i. Exprimer les termes généraux des suites $\delta^2(a)$ et $\delta^3(a)$; en déduire les solutions dans E des équations $\delta^2(x) = 0$ et $\delta^3(x) = 0$.

i.i. Montrer que, si $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, le terme général de la suite $\delta^k(a)$ est égal à :

$$\sum_{p=0}^{k} (-1)^p C_k^p a_{n+k-p}$$

C_k^p désigne les coefficients binomiaux usuels.

En déduire le noyau de δ^k ainsi que sa dimension en tant que sous-espace vectoriel de E.

2 - *i.* Soit α un nombre réel et $a = (a_n)_{n\geq 0}$ la suite de E définie, pour tout n entier, par $a_n = e^{n\alpha}$; déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur α pour que cette suite soit A.M.

i.i. Soit f une application deux fois continûment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f''(x) \geq 0$ (f'' désignant selon l'usage la dérivée seconde de f). Montrer que la suite définie par $a_n = f(n)$ pour tout entier $n \geq 0$ est une suite convexe.

3 - Soit a un élément de E vérifiant : $\delta(a) \geq 0$ et $\delta^2(a) \geq 0$.

i. Si $a = (a_n)_{n\geq 0}$, montrer que pour tout couple (n, p) d'entiers on a :

$$a_{n+p} - a_n \geq a_p - a_0$$

i.i. En déduire que si la suite a est convergente alors tous ses termes sont constants.

4 - Soit f une application $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivable et 2π — périodique vérifiant $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$; on désigne par $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de f. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,dx$$

a) Quels sont les coefficients de Fourier de la dérivée $n^{ième}$ de la fonction f, *notée* $f^{(n)}$?

b) Exprimer à l'aide de la suite $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(n)}(x)|^2\,dx \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(Par convention $f^{(0)} = f$)

c) En déduire que la suite $a = (a_n)_{n\geq 0}$ avec pour tout n :

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(n)}(x)|^2\,dx \text{ est A.M.}$$

DEUXIÈME PARTIE

Dans toute la suite du problème, on note F le sous-espace vectoriel de E constitué par les suites $a = (a_n)_{n\geq 0}$ telles que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ ait un rayon de convergence infini.

Pour $a \in F$ on pose, si $a = (a_n)_{n\geq 0}$:

pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ et $\varphi_a(x) = e^{-x} g_a(x)$.

1 - *i.* Montrer que si a est une suite bornée alors a appartient à F.

i.i. Montrer que si a appartient à F et si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi_a(x) = 0$$

i.i.i. Soit $a \in F$, on suppose $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, avec $l \in \mathbb{R}$.

Que dire de $\lim_{x\to+\infty} \varphi_a(x)$?

2 - Soit a un élément de F.

i. Dire pourquoi la fonction φ_a, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

i.i. Calculer ses fonctions dérivées premières et secondes : φ'_a et φ''_a

i.i.i. Si k est un entier naturel non nul montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \frac{d^k}{dx^k}(\varphi_a)(x) = e^{-x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\delta^k(a)\right)_n \frac{x^n}{n!}\right)$$

où $\left(\delta^k(a)\right)_n$ est le terme général de la suite $\delta^k(a)$, ce qui veut dire :

$$\delta^k(a) = \left(\left(\delta^k(a)\right)_n\right)_{n\geq 0}$$

3 - Soit P un polynôme à coefficients réels et $a = (a_n)_{n\geq 0}$ la suite de E, définie pour tout entier $n \geq 0$ par : $a_n = P(n)$.

i. Montrer que a est un élément de F.

i.i. On suppose P de degré k s'écrivant :

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x(x-1) + .. + \alpha_k x(x-1)\dots(x-k+1)$$

Montrer qu'alors :

$$\varphi_a(x) = \sum_{n=0}^{k} \alpha_n x^n$$

Retrouver la valeur de $\delta^p(a)$ pour tout entier $p \geq k+1$.

4 - Soit k un entier naturel donné, $k \geq 1$, et $a = (a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = n^k$$

a) Soit p un entier naturel, $p \geq 2$, $b_{1,p}$, $b_{2,p}$, ..., $b_{p,p}$ les réels vérifiant :

$$(\forall\, x \in \mathbb{R})\ \left(x^p = b_{1,p}\, x + b_{2,p}\, x(x-1) + \dots + b_{p,p}\, x(x-1)\dots(x-p+1)\right)$$

Que valent $b_{1,p}$ et $b_{p,p}$?

b) Montrer les relations suivantes :

$$b_{i,p+1} = i b_{i,p} + b_{i-1,p} \text{ pour tout } i \text{ vérifiant } 2 \leq i \leq p.$$

En déduire : $b_{i,p} \geq 0$ pour tout entier i, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.

c) Justifier la relation :

$$(\forall\, x \in \mathbb{R})\ \left(k!\, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\delta^k(a)\right)_n \frac{x^n}{n!}\right)$$

et en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+k)^k - C_k^1 (n+k-1)^k + \dots + (-1)^k n^k = k!$

d) Déduire de ce qui précède que la suite a est A.M.

TROISIÈME PARTIE

Soit $a = (a_n)_{n\geq 0}$ un élément de E tel que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et ait pour somme le réel l.

Pour tout entier n on note $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et α la suite de E définie par $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$.

1 - Montrer que a et α sont des éléments de F.

2 - Établir la relation :

$$(\forall\, x \in \mathbb{R})\ \left(g'_a(x) = g'_\alpha(x) - g_\alpha(x)\right)$$

g'_a et g'_α désignant les dérivées des fonctions g_a et g_α associées à a et α, et définies dans la deuxième partie.

3 - Montrer que pour tout réel x on a : $\int_0^x e^{-t} g_a(t)\,dt = e^{-x}\left(g_\alpha(x) - g_a(x)\right)$

En déduire la propriété (B) ci-après : (B) : $\left(\int_0^{+\infty} e^{-x} g_a(x)\,dx$ converge et vaut $l\right)$.

4 - On se propose dans cette question de montrer la propriété (B) d'une autre manière dans le cas suivant :

$a = (a_n)_{n\geq 0}$ est une suite positive, et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

i. Exprimer en fonction de l'entier n la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$

i.i. Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ l'égalité :

$$\int_0^x e^{-t} g_a(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^x e^{-t} t^n\,dt$$; en déduire la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-x} g_a(x)\,dx$

ainsi que l'inégalité : $\int_0^{+\infty} e^{-x} g_a(x)\,dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

i.i.i. Si N est un naturel, $N \geq 1$, vérifier que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}\,dx$ converge et calculer sa valeur ; en déduire le résultat souhaité c'est-à-dire :

$$(B) : \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} g_a(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)$$

QUATRIÈME PARTIE

A traiter uniquement par les candidats de l'option M.

On suppose dans cette partie que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est définie par : $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = \frac{1}{n^k} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

où k est un entier naturel non nul donné.

i. Montrer que, quel que soit l'entier k, la suite $a = (a_n)_{n\geq 0}$ est un élément de F.

i.i. On suppose $k = 1$; exprimer la dérivée de la fonction g_a associée à cette suite, et définie dans la deuxième partie ; en déduire, au voisinage de $+\infty$, l'équivalence :

$$g_a(x) \underset{+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$$

puis, en calculant la dérivée de la fonction $t \to \frac{e^t}{t}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$, justifier l'équivalence au voisinage de $+\infty$:

$$g_a(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}.$$

i.i.i. Pour $k \geq 2$, exprimer la dérivée de la fonction $t \to \frac{e^t}{t^k}$ sur $[1, +\infty[$.

En déduire au voisinage de $+\infty$ l'équivalence : $\int_1^x \frac{e^t}{t^k}\,dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^k}$ puis : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k\, n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^k}$.

ECOLES MILITAIRES SAINT-CYR
M, P, T, TA-Maths

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail